

Prof. dr hab. inż. Jacek Chróścielewski  
Katedra Wytrzymałości Materiałów  
Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska  
Politechnika Gdańska  
ul. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk

*Dziękuję*  
*23/10/2023*

Gdańsk, 10.10.2023r.

DZIEKAN  
Wydziału Inżynierii Lądowej

prof. dr hab. inż. Andrzej Garbacz

WPŁYNEŁO

17.10.2023

569 2023

## Recenzja

rozprawy doktorskiej mgra inż. ALEKSANDRA FRANUSA  
pt. „*Wzbogacenie modeli konstytutywnych hipersprężystości  
o opis właściwości reologicznych materiału*”

### 1. Podstawa i przedmiot recenzji

Podstawą opracowania recenzji jest pismo WTBD.512.DR.128.2023 z dnia 13 lipca 2023 r. skierowane do mnie przez Pana prof. dr hab. inż. KONRADA LEWCZUKA, Przewodniczącego Rady Dyscypliny Naukowej Inżynieria Lądowa, Geodezja i Transport Politechniki Warszawskiej, z prośbą o opracowanie recenzji.

Przedmiotem recenzji jest rozprawa doktorska Pana mgra inż. ALEKSANDRA FRANUSA pt. „*Wzbogacenie modeli konstytutywnych hipersprężystości o opis właściwości reologicznych materiału*”, złożona na Wydziale Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej. Promotorem w przewodzie jest Pan prof. dr hab. inż. STANISŁAW JEMIOŁO. Doktorant reprezentuje dziedzinę *nauk inżynieryjno-technicznych, dyscyplinę inżynieria lądowa, geodezja i transport.*

### 2. Omówienie pracy

Opiniowana dysertacja ma formę książkową, liczy 139 numerowanych stron, wg obliczeń recenzenta zawiera: 50 rysunków, w tym wykresy i zdjęcia, 231 numerowanych wzorów i kilka nienumerowanych oraz 156 pozycji literatury.

Dysertacja składa się z siedmiu numerowanych rozdziałów: (1) *Wstęp*, (2) *Elementy mechaniki ośrodków ciągłych*, (3) *Relacje konstytutywne lepko-hipersprężystości*, (4) *Propozycje uogólnienia modeli hipersprężystości o opis efektów lepkich*, (5) *Interpretacje propozycji modeli konstytutywnych w podstawowych zadaniach*, (6) *Implementacja numeryczna modeli*, (7) *Podsumowanie i wnioski*. Pracę poprzedzają dedykacje, streszczenia w języku polskim i angielskim ze słowami kluczowymi, spis treści i zestawienie oznaczeń, zaś kończy lista cytowanej literatury oraz dwa dodatki A) UMAT i B) UANISOHYPER\_INV, będące kodami w języku Fortran podprogramów wsadowych do systemu obliczeniowego Abaqus.

Praca jest udaną propozycją uogólnienia o właściwości wiskotyczne równań konstytutywnych hipersprężystych materiałów ściśliwych i małościśliwych. Punktem wyjścia do rozszerzenia są modele materiału Ciarleta i Ishihary-Zahorskiego. Jako uogólnienie zaproponowano dwojakiemu rodzaju rozszerzenie równań tych modeli o zmienne wewnętrzne opisujące właściwości lepkie (pełzania i relaksacji), w postaci skalarnej lub tensora drugiej walencji. Końcowe formuły są dedykowane opisowi kompozytów jednokierunkowo zbrojonych włóknami ciągłymi z fazami w postaci matrycy lepko-sprężystej i sprężystego zbrojenia. Docelowo proponowane równania zaimplementowano jako procedury interfejsowe w środowisku komercyjnego systemu obliczeniowego metody elementów skończonych ABAQUS. Ostatecznie wykorzystując te procedury przeprowadzono weryfikację obliczeniową metodą elementów skończonych Autorskich koncepcji teoretycznych.

Dysertacja napisana jest w języku polskim, datowana jest na rok 2023.

### 3. Omówienie zakresu rozdziałów

Właściwy tekst rozprawy poprzedzają dedykacje, streszczenia w języku polskim i angielskim ze słowami kluczowymi, spis treści oraz zestawienie oznaczeń.

**Rozdział 1.** pt. „*Wstęp*”, liczy 5 stron, zawiera 2 rysunki i składa się z 2. podrozdziałów. Rozdział stanowi wprowadzenie do tematyki rozprawy, precyzyjne studium literatury w kontekście poruszanych problemów oraz motywację podjęcia tematu. W kontekście uwarunkowań płynących z zakresu fizyki i matematyki sformułowano tezę pracy sprowadzoną do trzech szczegółowych punktów, cyt.:

*relacje konstytutywne modeli materiałów lepko-sprężystych postulowane w ramach mechaniki kontinuum ciała stałego powinny uwzględniać;*

1. *wymaganie obiektywności związanej z transformacjami Galileusza oraz danej symetrii materiału w konfiguracji początkowej,*
2. *termodynamiczną dopuszczalność poprzez ograniczenie wynikające z nierówności Clausiusa-Duhema,*
3. *poliwypukłość oraz warunki wzrostu funkcji energii sprężystości.*

**Rozdział 2.** pt. „*Elementy mechaniki ośrodków ciągłych*”, liczy 13 stron, zawiera 50 wzorów, 3 rysunki i składa się z 6. podrozdziałów. Zgodnie z tytułem rozdziału, w sposób zwięzły i kompetentny, przedstawiono aspekty mechaniki ośrodków ciągłych wyróżnione tytułami podrozdziałów, niezbędne do czytelnego sformułowania i dyskusji propozycji Autorskich. Problem osadzono w przestrzeni fizycznej jako czasoprzestrzeni Galileusza-Newtona bez grawitacji i bez oddziaływań termicznych. Między innymi na potrzeby opisu właściwości reologicznych wprowadzono opis deformacji ciała względem wybranej konfiguracji odniesienia ciała  $x$ , poprzez względny tensor gradientu deformacji  $F$ . Ponadto od strony termodynamicznej, rozważania świadomie ograniczono do teorii czysto mechanicznej, pomijając efekty termiczne, zaś zgodność z drugą zasadą termodynamiki uzyskano przez wprowadzenie dysypacji mechanicznej  $D$ . W ramach omawiania struktury relacji konstytutywnych, wprowadzono powiązaną z opisem reologii tensorową zmienną wewnętrzną  $\alpha$  oraz określono ogólne wymagania co do obiektywności i zgodności z zasadami termodynamiki w opisie materialnym nałożone na funkcje określające tensor naprężeń  $T$  i funkcję energii swobodnej  $\Psi$ .

**Rozdział 3.** pt. „*Relacje konstytutywne lepko-hipersprężystości*”, liczy 13 strony, zawiera 48 wzorów i składa się z 2. podrozdziałów o rozwiniętym układzie. W rozdziale, ogólne wymagania dotyczące relacji konstytutywnych, ukierunkowano na materiały będące celem badań Autorskich, tj. hipersprężystości w sensie Greena oraz ich rozszerzenia do lepko-hipersprężystości ośrodków jednorodnych. Podkreślono znaczenie warunku poliwypukłości funkcji energii sprężystości w kontekście istnienia rozwiązań sformułowania wariacyjnego zagadnienia brzegowego. W punkcie dotyczącym hipersprężystości wyrażono funkcję energii sprężystości  $W$  poprzez niezmienniki  $I_i$  tensorów deformacji Cauchy’ego-Greena (prawego  $C$  lub lewego  $B$ , czy ich odpowiedników izochorycznych) ośrodka izotropowego ( $i = 3$ ) oraz ich kombinacji z tensorem parametrycznym ( $M$ ) ciała transwersalnie izotropowego ( $i = 5$ ). Ostatecznie wyróżniono dwie postaci poliwypukłych wielomianowych funkcji energii sprężystości ciał izotropowych, określanych w literaturze jako model Ciarleta i model Ishihary-Zahorskiego, które stanowią podstawę do Autorskiego uogólnienia relacji konstytutywnej o opis właściwości reologicznych. Warunek nieściśliwości jest uwzględniany po odpowiedniej dekompozycji funkcji energii sprężystości na części związane z deformacją objętościową oraz postaciową. W celu opisu materiałów transwersalnie izotropowych funkcję energii sprężystości  $W$ , definiowaną prawym tensorem deformacji Cauchy-Greena  $C$ , rozszerza się o symetryczny tensor parametryczny  $M$  drugiej walencji. Tensor parametryczny  $M$  określa mikrostrukturę

materiału w konfiguracji odniesienia tak, że jego grupa symetrii definiuje grupę symetrii materiału. W punkcie dotyczącym lepko-hipersprężystości omawia się ogólną relację konstytutywną materiału lepko-sprężystszego w zakresie dużych deformacji z funkcjonałem odpowiedzi  $G$ . Omówiono trzy główne postaci funkcjonału odpowiedzi  $G$ : różniczkową, prędkościową i całkową, a także sformułowanie oparte o zmienne wewnętrzne wprowadzane do relacji konstytutywnej poprzez funkcję Helmholtza z wymogiem opisu ich ewolucji. Wskazano na zalety postaci całkowej tzw. quasi-liniowego modelu lepkosprężystości (QVL) w opisie lepko-hipersprężystości w formule podziału na części kulistą i dewiatorową tensora naprężenia Cauchy'ego przy założeniu o małościściwości materiału w części hipersprężystej.

**Rozdział 4.** pt. „*Propozycje uogólnienia modeli hipersprężystości o opis efektów lepkich*”, liczy 9 stron, zawiera 47 wzorów i składa się z 2. podrozdziałów o rozwiniętym układzie. Rozdział przedstawia Autorskie propozycje dwóch klas związków konstytutywnych lepko-hipersprężystości, których bazą są dwa modele hipersprężystości o poliwy pukłej funkcji energii sprężystości  $W$ , tj. sygnowane: literą **a** model Ciarleta (ciało ściśliwe) oraz literą **b** model Ishihary-Zahorskiego (materiał małościściwy/nieściśliwy). Pierwsza klasa wiąże się z wprowadzeniem skalarnej zmiennej wewnętrznej w odniesieniu do obu typów materiałów, tj. ściśliwych oraz małościściwych/nieściśliwych (sygnowanych cyfrą **1**). Drugą klasę stanowią modele ze zmienną wewnętrzną w formie tensora drugiej walencji dedykowane głównie materiałom małościściwym/nieściśliwym (oznaczone cyfrą **2**), a które można sprowadzić do związku quasi-liniowego (QLV). W obu klasach zmienne wewnętrzne wprowadza się do relacji konstytutywnej poprzez funkcję Helmholtza z podaniem równań ich ewolucji. W przypadku ciał ściśliwych wzbogacono opis do materiałów zbrojonych jednokierunkowo włóknami (oznaczonych literą **f**), jest to szczególny przypadek ciała o transwersalnej izotropii. Uwzględnienie zbrojenia zrealizowano przez addytywny podział energii Helmholtza według proporcji objętościowej zajętości rodziny włókien w jednostce kompozytu w stanie początkowym. Ostatecznie sformułowano sześć Autorskich propozycji związków konstytutywnych ośrodka lepko-hipersprężystego oznaczonych jako modele: 1a, 1b, 2a, 2b, 1af, 1bf. We wszystkich przypadkach przeprowadzono dyskusję parametrów wchodzących do tych związków pod kątem spełnienia warunków poliwy pukłości.

**Rozdział 5.** „*Interpretacje propozycji modeli konstytutywnych w podstawowych zadaniach*”, liczy 15 stron, zawiera 21 wzorów, 22 rysunki w formie złożonych wykresów, tworząc 2 podrozdziały o rozwiniętym układzie. Rozdział poświęcony jest interpretacji i ocenie zachowania zaproponowanych modeli Autorskich w klasycznych testach, stosowanych w odniesieniu do problemów reologicznych. Obejmują one zagadnienia relaksacji i pełzania oraz deformacji z przedziałowo stałą prędkością (obciążenie i odciążenie) w stanach jednorodnych wymuszeń w zależności do testu, albo deformacji (**F**) albo naprężeń (**T**). Wyniki rozwiązania testów relaksacji podano w formie zamkniętych wzorów ścisłych. Na potrzeby pozostałych testów równania ośrodka *lepko-hipersprężystego*, przez odpowiednie dobranie wchodzących do nich współczynników definiujących materiał, zapisano w postaci bezwymiarowej. Wyniki tych testów, interpretujące wpływ różnych parametrów, przedstawiono w postaci wykresów uzyskanych na drodze analitycznej wspomagananej systemem obliczeń symbolicznych i numerycznych Mathematica.

**Rozdział 6.** pt. „*Implementacja numeryczna modeli*”, liczy 29 stron, zawiera 65 wzorów, 25 rysunków i składa się z 5. podrozdziałów o rozwiniętym układzie. W rozdziale przedstawiono zarys metody elementów skończonych w odniesieniu do zagadnień quasi-statycznych w wersji przemieszczeniowej z rozszerzeniem na ujęcie hybrydowe z ciśnieniem jako zmienną niezależną. Zarys ten obejmuje zależności, które są podstawą do implementacji w ramach komercyjnego systemu ABAQS proponowanych Autorskich związków

konstrytuwnych opisujących lepko-hipersprężystość w zakresie dużych odkształceń. Wskazano techniki implementacji pozwalające na aplikację do sytemu ABAQUS relacji konstrytuwnych hiper- i hiposprężystości materiałów izo- i anizotropowych oraz uwzględnienia ciśnienia jako zmiennej niezależnej (sformułowanie hybrydowe). Po zdefiniowaniu odpowiednich relacji dotyczących tensorów sztywności i równań ewolucji zmiennych wewnętrznych, wykorzystując interfejsy sytemu ABAQUS, zaimplementowano dwa modele ciał zbrojonych włóknami. Implementacja ta ma formę kodów w języku FORTRAN i dotyczy modeli 1af i 2af, w postaci dwóch procedur UMAT i UANISOHYPER, których kod zamieszczono w dodatkach.

Ostatnią fazą rozdziału i zarazem dysertacji są testy numeryczne weryfikujące poprawność zarówno koncepcji jak i jej aplikacji w systemie ABAQUS.

Pierwsza grupa to zadania elementarne w stanach jednorodnych mające rozwiązania analityczne. Dotyczą one modelu 1af i są ograniczone do badań z użyciem pojedynczego ośmiowęzłowego elementu bryłowego C3D8R o trójliniowych funkcjach kształtu przy jednopunktowej (jednocie zredukowanej) formule całkowania zależności elementowych. Weryfikacja związków hipersprężystości obejmuje badania jednoosiowego stanu odkształcenia oraz stanu, który nazwano czystym ścinaniem przy sterowaniu parametrami typu przemieszczeniowego. Relacje lepko-hipersprężystości są weryfikowane w zadaniu relaksacji sprowadzonego do stanu jednoosiowego odkształcenia sterowanego parametrem przemieszczenia ( $F_{11} = 2$ ), zaś zadanie pełzania sprowadzono do stanu płaskiego rozciągania sterowanego parametrem obciążenia ( $\sigma_{11}$ ).

Drugą grupę testów tworzą zadania, w których stany jednorodne nie występują i dla których nie ma rozwiązań analitycznych, stąd badania poprawności ich rozwiązań sprowadzono do jakościowej oceny deformacji przestrzennej siatki dyskretyzacyjnej. Rozważono trzy testy z dyskretyzacją po przestrzeni, nazwane: deformacja kuli, skręcanie prostopadłościanu, inflacja powłoki. W zadaniu ściskania kuli weryfikowano relację hipersprężystą modelu 1af z ustaloną konfiguracją włókien, wykorzystując do dyskretyzacji 8-węzłowy element bryłowy C3D8R. Obciążenie zadano poprzez kontakt z nieodkształcalną membraną przy sterowaniu przemieszczeniowym. Wyniki przedstawiono w postaci wybranych rzutów zdeformowanej siatki dyskretyzacyjnej z nałożonymi mapami niektórych składowych przemieszczenia lub ekstremalnych wartości głównych tensora odkształceń.

Test skręcania prostopadłościanu o podstawie kwadratu i podwojonej wysokości dotyczy oceny związku lepko-hipersprężystości materiału izotropowego (model 1a) przy obciążeniu i odciążeniu. Do dyskretyzacji, jak poprzednio, użyto 8-węzłowego elementu bryłowego C3D8R. Obciążenie zrealizowano przy sterowaniu przemieszczeniowym przy wymuszeniu kąta skręcenia. Wyniki przedstawiono w postaci dwóch rzutów zdeformowanej siatki dyskretyzacyjnej z nałożonymi mapami naprężeń stycznych  $\sigma_{23}$  i składowej 23 tensora rozciągnięć  $\ln V$  oraz wykresów ewolucji zmiennej wewnętrznej  $g(t)$  i dwóch składowych stycznych tensora naprężeń  $\sigma$  w odniesieniu do odpowiednich składowych tensora wydłużeń  $\ln V$  występujących w ustalonym elemencie skończonym.

Ostatnim jest zadanie inflacji (nadymania) powłoki z materiału lepko-hipersprężystego w dwóch wariantach prawa konstrytuwnego: quasi-liniowego QLV materiału izotropowego i zbrojonego włóknami (model 2a i 2af) oraz ze skalarną zmienną wewnętrzną materiału izotropowego (model 1a). W wariacie z modelem QLV obciążenie ciśnieniem opisane jest funkcją dwuliniową o liniowym wzroście do ustalonego poziomu, który dalej pozostaje stały, a więc w tej części odpowiada testowi pełzania. Rozważono materiał izotropowy i zbrojony włóknami. Płyte, w celu porównań wpływu dyskretyzacji na rozwiązania, odwzorowano dwoma typami elementów powłokowych, tj.: klasycznym, powierzchniowym 4-węzłowym S4R i  $2 \times 3 = 6$ -węzłowym przestrzennym SC6R, oba z całkowaniem zredukowanym. Wyniki przedstawiono w postaci rysunków porównujących postaci deformacji oraz wykresów

ewolucji: ugięcia środka płyty  $u_3(t)/R$  i wydłużenia  $\lambda_{11}(t)$ , a także zależności naprężenia od wydłużenia  $\sigma_{11}(\lambda_{11}(t))/\mu_0$  i  $\sigma_{22}(\lambda_{22}(t))/\mu_0$  występujące w dolnej powierzchni okolic środka płyty. Wariant inflacji powłoki ze skalarną zmienną wewnętrzną (model 1a) poddany jest ciśnieniu realizującym stan obciążenia i odciążenia. W tym przypadku układ dyskretyzowano 8-węzłowymi elementami bryłowymi C3D8R. Wyniki przedstawiono w postaci ścieżki równowagi ciśnienie-ugięcie środka płyty oraz wykresów naprężenia  $\sigma_{11}/\mu_0$  w funkcji rozciągnięcia  $\lambda_{11}$  i ewolucji zmiennej wewnętrznej  $g(t)$  z wybranych elementów.

**Rozdział 7. pt. „Podsumowanie i wnioski”**, liczy 2 strony i zawiera 1 wzór. Sformułowano tu wnioski końcowe i stwierdzenie spełnienia tez postawionych w dysertacji.

Pracę kończy zestawienie cytowanej literatury liczące 156 pozycji oraz dwa dodatki A) UMAT i B) UANISOHYPER\_INV będące kodami w języku programowania Fortran podprogramów (procedur) wsadowych do systemu obliczeniowego ABAQUS.

#### 4. Komentarz i uwagi

Wstęp jest kompetentnym studium literatury tworzącym podstawę do sformułowania trójpunktowej tezy doktoratu. W dwóch kolejnych rozdziałach Autor zawarł podstawy mechaniki ośrodka ciągłego (MOC) rozszerzone o elementy termodynamiki w zakresie niezbędnym do wykazania postawionych tez. Zawarty tam materiał i sposób jego przedstawienia wskazują na opanowanie i swobodne poruszanie się Doktoranta w tej trudnej tematyce. Rozdział czwarty stanowi teoretyczne jądro dysertacji. Tutaj Autor formułuje wielomianowe funkcje konstytutywne ciał lepko-hipersprężystych, które ujmuje w sześciu modelach materiału. Istotą jest to, że modele te a priori są formułowane tak, aby spełniały drugi i trzeci postulat z postawionych w tezach, tj. (2) termodynamiczną dopuszczalność i (3) poliwypukłość ze wzrostem funkcji energii sprężystości. W rozdziale piątym podano interpretację tych zależności. W przypadku zadań relaksacji mają one formę zamkniętych rozwiązań analitycznych. W zadaniach pełzania i quasi-statycznej deformacji ze stałą prędkością zależności sprowadzono do analitycznej postaci bezwymiarowej, a ich rozwiązania mają formę wykresów uzyskanych przy użyciu systemu obliczeń symbolicznych i numerycznych Mathematica. Postulat pierwszy tezy doktoratu, tj. (1) wymóg obiektywności, spełniony jest poprzez zastosowanie pochodnej Zaremby-Jaumanna w powiązaniu z odpowiednią postacią tensora sztywności stycznej, podano w rozdziale szóstym, który stanowi implementację numeryczną proponowanych koncepcji teoretycznych w środowisku metody elementów skończonych. Co oznacza, że postawione tezy rozprawy doktorskiej zostały wykazane. Tutaj, jeszcze raz trzeba podkreślić swobodne poruszanie się Doktoranta w tej trudnej od strony teoretycznej tematyce.

Lektura rozprawy pozwala na przedstawienie pewnych uwag o charakterze dyskusyjnym i szczegółowym, co następuje poniżej.

W części teoretycznej pracy pożądanym byłoby wyraźne wskazanie, które z całego toku rozważań są indywidualnym i oryginalnym osiągnięciem Autora.

Str.27, r.(2.1.19) w definicji tensorów prędkości deformacji i spinu zgubiono mnożnik  $\frac{1}{2}$ .

Str.31, pojawia się konflikt oznaczeń symbol  $\delta$  (delta), np.: w r.(2.5.10) i (6.1.1) oznacza dyssypację mechaniczną, w r.(5.1.14) dystrybucję Diraca, zaś w rozdziale 6 wariację.

Str.34, w kilku miejscach nowe zdanie początkuje mała litera, np.: s.34, d.4; s.42, g.9.

Str.40 i 41, brak definicji izochorycznego prawego tensora deformacji Cauchy'ego-Greena.

Str.41, g2, zamiast punkt 1) powinien być punkt a).

Str.47, czy podjęto próbę wykorzystania dekompozycji multiplikatywnej gradientu deformacji

$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_i$ , czy są takie plany w przyszłości?

- Część związaną z lepkością czytelniej byłoby etykietować literą  $\nu$ , tak jak np. w pracach [6] BAHREMAN, DARIJANI & NAROOEI (2022) oraz [91] LATORRE & MONTANS (2016).
- Str.55, drugi akapit, powinno być  $N$  duże, tj.  $N = 1$ .
- Str.57, w pierwszym akapicie niefortunnie zapisano „relaksacja” (odprężenie) zamiast np. „zmiana”, cyt. „Zjawisko *relaksacji* odkształceń przy stałym naprężeniu nazywane jest *pełzaniem*.”, zauważmy, że w pełzaniu odkształcenia narastają, co więcej przecież nie napiszemy przez analogię: „zjawisko *relaksacji* naprężenia ... nazywane jest *relaksacją*”.
- Str.57, jaka jest interpretacja współczynnika  $\vartheta$  (teta) w r.(5.1.1.) (także r.(4.2.8), str.51)?
- Str.60, r.(5.1.9) brak formalnej definicji operatora DEV.
- Str.62, rys.5.1.5b, jaka jest interpretacja w teście pełzania zjawiska odbicia  $\lambda_2$  w modelu 2b?
- Str.63, g1, czy równania bezwymiarowe (5.1.8) i (5.1.16), jak napisano, dotyczą testu relaksacji? Szkoda, że nie podano postaci bezwymiarowej, o której tam jest mowa.
- Str.63, g3, w kontekście testu trójosiowego ściskania/rozciągania, warto dodać, iż jest on sterowany parametrem kinematycznym (przemieszczeniem), ponieważ poszukiwany jest stan naprężeń generowany zadaną zmianą stanu deformacji wg. rys.5.1.6.
- Str.63, g8, jak należy rozumieć „mniej standardowe rozwiązania”?  
Raczej na etapie testowania własnych koncepcji należałoby powtórzyć takowe, zaznane z literatury rozwiązania i przedstawić dyskusję na ich tle.
- Str.64, opis osi rys.5.1.7 jest niepoprawny, powinno odpowiednio być  $\sigma_{11}/\mu_0$  i  $\lambda_1$ .
- Str.65, wykresy a i b z rys.5.1.8 i 5.1.9 nie są między sobą skorelowane, należałoby zestawić je z wykresami z rys.5.1.10, do którego nie odwołano się w tekście.
- Str.64, d4, cyt.: „wartość  $\text{sgn}(\dot{g})$  nie wszędzie, gdzie następuje obciążenie, tj. w przedziałach  $t$ : (0, 1); (2, 2.5); (3, 4) jest równa 1.” Jak jest interpretacja fizyczna tego stanu?  
Czy jest to efekt opóźnienia prędkościowego? Wówczas powinien on chyba także pojawić się przy powrotnym obciążeniu przy wartości  $-1$ . Czy nie jest to przypadkiem efekt numeryczny związany z użytą metodą całkowania w dziedzinie czasu?
- Str.67, d2, nieprecyzyjnie opisano jednoosiowy stan odkształcenia.
- Str.68, g2, brak „rys.” przed 5.1.15. Brak odwołania w tekście do rys.5.1.16 i rys.5.1.17.  
Czy podjęto próbę opisu efektu Mullinsa, czy są takie plany w przyszłości?
- Str.70, g3, drugi akapit zgubiono „do”.  
Skale osi na rys.5.2.1, rys.5.2.3b, rys.5.2.4a są nieczytelne, kolejność rysunków powinna być zgodna z kolejnością odwołania w tekście, brak odwołania do rys.5.2.4.
- Str.72, g1, wg recenzenta, nazwa „metoda elementów skończonych”, jest w języku polskim uzasadniona, tak jak metoda różnic skończonych, a nie metoda różnicy skończonej.
- Str. 73, przedostatni akapit, warto pamiętać, że tensor naprężeń Kirchhoffa ( $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}$ ), tak jak tensor gradientu prędkości ( $\mathbf{L} = \partial_x \mathbf{v}$ ), także jest mierzony w konfiguracji aktualnej  $\mathbf{x}$ .
- Str.74, g2, chyba chodzi tu nadal o zasadę mocy wirtualnej, a nie pracy wirtualnej.  
R.(6.2.3) zawiera także aproksymację geometrii aktualnej w ujęciu izoparametrycznym.
- Str.75, r(6.2.6) w drugim składniku błędnie przyporządkowany do  $\partial_x N_a$  symbol wariacji  $\delta$ .
- Str.76, r.(6.2.13) pochodna Zarembki-Jaumanna niekiedy w testach czystego ścinania wykazuje fizycznie nieuzasadnione oscylacje [zob. np. SCHIECK & STUMPF (1995)], czy takowe obserwowano może w badaniach Autora?  
SCHIECK B., STUMPF H. (1995): The appropriate corotational rate, exact formula for the plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures* 32(24) 3643+3667.
- Str. 88. Podrozdział 6.4. Podstawowe testy numeryczne. Nie jest jasne jak należy rozumieć te testy, czy nie chodzi tu o jednorodne pola jak we wcześniejszych testach analitycznych? Szczególnie dotyczy to testu nazwanego czystym ścinaniem. Klasycznie bowiem rozumiany jest on jako stan naprężenia, w którym tylko jedna składowa naprężeń stycznych jest różna od zera (np.  $\sigma_{12}$ ), zaś w tekście jest napisane, cyt.: „Wszystkie warunki brzegowe zostały określone jako przemieszczeniowe.”

- Str. 89, rys.6.4.2 dotyczący ścinania - wynika z niego, że test ścinania sterowany był składową normalną  $\lambda_{11}$ , czy nie ma tu pomyłki?  
 Na rys.6.4.2a zamieszczano błędny obrazek poglądowy dot. jednoosiowego rozciągania, a nie ścinania.  
 Kierunek włókien opisuje wektor  $\mathbf{m}$ . Do jego opisu błędnie użyto notacji tensorowej, bowiem to zgodnie z definicją, np. str.42, tensor parametryczny ma postać  $\mathbf{M} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$ .
- Str.90, rys.6.4.4b, zły opis osi rzędnych, jest  $\sigma_{55}/\mu_0$  a powinno być  $\sigma_{33}/\mu_0$ .
- Str.91, czy w kolejnych zadaniach z dyskretyzacją po przestrzeni badano wpływ zagęszczenia siatki dyskredytacyjnej na rozwiązania (test zbieżności ze względu na podział)?  
 Jakie było kryterium doboru typowego wymiarów elementu skończonego w poszczególnych zadaniach?
- Str.91, zadanie kuli, rys.6.5.1, przykład ma trzy płaszczyzny symetrii, warto wykorzystać taki fakt i prowadzić obliczenia w układzie zredukowanym.  
 Układ włókien opisuje wektor  $\mathbf{m}$ . Do jego opisu błędnie użyto notacji tensora prostego.  
 Czy sprawdzono liczbowo symetrię w prezentowanych wynikach?
- Str.92, na rys.6.5.4a widoczne jest pewne zafalowanie zdeformowanej siatki podziału, co jest jego przyczyną? Jak wygląda powierzchnia kontaktu, co tam się dzieje z deformacją?  
 Czy przypadkiem nie pojawiły się formy pasożytnicze występujące przy stosowaniu całkowania zredukowanego? Czy użyto technik filtrowania form pasożytniczych?
- Str.93, wg literatury, cyt.: „...relacja konstytutywna z dekompozycją energii na część związaną ze zmianami objętości i postaci z jednoczesnym uwzględnieniem anizotropii materiału, może prowadzić do niefizycznych rezultatów, ...” odpowiada to modelowi 2af.  
 Czy próbowano potwierdzić te spostrzeżenia własnymi badaniami?  
 Test skręcania; nie jest jasne jakie warunki brzegowe wprowadzono. Czy nałożono je na całą powierzchnię dolną i górną (ruch sztywny), co sugeruje rys.6.5.6. Występuje błąd indeksów  $u_1$ ,  $u_1 = 0$ . Jeśli  $u_3 \neq 0$ , chyba powinna pojawić się deplanacja na górze?
- Str.94, co było przyczyną niepowodzenia realizacji większego skręcenia? Czy próbowano zagęścić siatkę dyskredytacyjną lub/i zmienić element skończony np. na wyższego rzędu?
- Str.96, test inflacji płyty; nie jest jasne jakie wprowadzono warunki brzegowe, bowiem z zapisu  $\varphi_r = 0$ ,  $u_3 = 0$ , wynika, że powinno to być „utwierdzenie poziomo przesuwne”, a więc na brzegu  $u_1$ ,  $u_2 \neq 0$ , co nie jest obserwowalne na rys.6.5.13 i 6.5.14.  
 Czy rzeczywiście realizowane obciążenie to ciśnienie, w sensie obciążenia śledzącego, tj. zależnego od kierunku normalnej do powierzchni deformującej się powłoki?  
 Z przedstawionych wyników w wariancie weryfikującym model QLV wynika, że rozważano zarówno materiał izotropowy, jak i zbrojony włóknami. Jednak w kontekście dyskretyzacji elementem S4R, nie podano parametrów tego drugiego, pojawiają się one dopiero w odniesieniu do dyskretyzacji elementem SC6R (str.97), jednak i tu brakuje definicji kierunku włókien (wektor  $\mathbf{m}$ ). Brak przy rozwiązaniach elementem S4R jednoznaczności opisu rysunków z tekstem, tzn. model 2a, czy 2af.  
 Rys.6.5.9, dyskretyzacja elementami S4R przy silnie nieliniowych zagadnieniach wydaje się zbyt uboga, szczególnie w okolicach brzegu (rys.6.5.13 i 6.5.14). Zdaniem recenzenta występuje tam problem z odtworzeniem fali deformacyjnej, porównaj rozwiązanie elementami SC6R (rys.6.5.15).
- Str.97, element SC6R nie jest ostrosłupem, także element SC8R nie jest prostopadłością. W ogólności są to w  $E^3$  bryły o prostych krawędziach i nie koniecznie płaskich ścianach. Ich elementy macierzyste (wzorcowe) są rzeczywiście prostopadłością o podstawie trójkąta (klin) i kwadratu (sześciąt) ale w  $R^3$ .  
 Zaskakująca jest gorsza zbieżność rozwiązań uzyskanych za pomocą elementów SC8R niż SC6R. Bowiem na ogół elementy niskiego rzędu z formułowane na bazie wzorca trójkąta na tym samym poziomie dokładności podziału i bez patologii w dyskretyzacji

wykazują gorsze cechy co do zbieżności niż elementy formułowane na bazie wzorca kwadratu.

Str.98, opisy osi i legendy na rys.6.5.12 są nieczytelne.

Str.99, rys.6.5.16a, dyskretyzacja z użyciem elementów C3D86 z jednym punktem całkowania wzbudza wątpliwości przy tak silnie nieliniowym problemie z udziałem zginania.

Czy przeprowadzono tu jakikolwiek test zbieżności rozwiązania pod kątem zagęszczenia podziału płyty zarówno w płaszczyźnie jaki po jej grubości?

Opisy osi na rys.6.5.17b są nieczytelne.

Reasumując, w odniesieniu do rozdz. 6.5, recenzent rozumie, że celem przeprowadzonych testów nie są same w sobie rozwiązania metody elementów skończonych (MES), a weryfikacja aplikacji w środowisku MES proponowanych związków konstytutywnych, co podkreślił Autor osiągnął z sukcesem. Tym niemniej Autor powinien dołożyć większej staranności w zakresie użycia MES tak, aby zminimalizować wpływ aproksymacji MES na cel podstawowy, jakim jest weryfikacja teorii, bo może to prowadzić do błędnych wniosków wynikających z niepożądanych efektów numerycznych.

Str.101, w podsumowaniu nie przedstawiono potencjalnych kierunków dalszych badań Autora.

**Literatura**, w trakcie czytania zauważono poniższe nieścisłości.

[86] - dwukrotnie powtórzono nazwiska autorów.

[154] - zamieniono imię z nazwiskiem pierwszego autora.

Reasumując, nie znajduję w teoretycznej części pracy istotnych niedociągnięć merytorycznych. Jednocześnie pragnę zaznaczyć, że poczynione liczne uwagi, głównie do rozdziałów z testami numerycznymi, nie obniżają wysokiej oceny rozprawy doktorskiej. Uwagi te są bowiem ukierunkowane na podniesienie jakości w tym zakresie przyszłych prac już Doktora. Uważam, że przedłożona rozprawa doktorska jest twórczym osiągnięciem Autora.

## 5. Wniosek końcowy

Stwierdzam, że przedstawiona do recenzji rozprawa Pana mgr. inż. ALEKSANDRA FRANUSA pt.: „*Wzbogacenie modeli konstytutywnych hipersprężystości o opis właściwości reologicznych materiału*” spełnia formalne warunki określone w art. 13 Ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (z późniejszymi zmianami). Ponadto stwierdzam, że Doktorant zrealizował problematykę badawczą nakreśloną w celu rozprawy oraz właściwie sformułował tezy i wskazał ich zasadność. Przyjęte w pracy metody badań są właściwe, potwierdzone odpowiednią analizą. Praca zawiera Autorskie elementy noszące znamiona ujęcia oryginalnego, jest na wysokim poziomie teoretycznym. Mając wskazane na uwadze, wnoszę do Rady Naukowej Dyscypliny Inżynierii Lądowej, Geodezji i Transportu Politechniki Warszawskiej o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie Pana mgr. inż. ALEKSANDRA FRANUSA do jej publicznej obrony.

